G^n. Warunki dostateczne regularności krzywej zależą od funkcji bazowych f_i. Na przykład opisane dalej krzywe γ-sklejane i β-sklejane mają **silną własność hodografu** (zobacz dla porównania p. 5.2.6), dzięki której łatwo jest tak wybrać punkty kontrolnych, aby krzywa była regularna.

8.2. Równania ciągłości geometrycznej krzywych

8.2.1. Wzór Fàa di Bruno

W opublikowanej w roku 1855 pracy [77] Fàa di Bruno przedstawił wzór opisujący pochodne dowolnie wysokiego stopnia złożenia dostatecznie gładkich funkcji jednej zmiennej. Oto ten wzór: niech $f(u)$ i $g(t)$ będą funkcjami klasy C^j i niech $h = g \circ f$, tj. $h(u) = g\bigl(f(u)\bigr)$. Wtedy

$$\frac{\mathrm{d}^j h}{\mathrm{d}u^j}(u) = \sum_{k=1}^{j} a_{jk}(u) \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} g(t)\Big|_{t=f(u)}, \tag{8.2}$$

gdzie

$$a_{jk}(u) = \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=j \\ m_1,\ldots,m_k>0}} \frac{j!}{k!\,m_1!\ldots m_k!} \frac{\mathrm{d}^{m_1} f}{\mathrm{d}u^{m_1}}(u) \ldots \frac{\mathrm{d}^{m_k} f}{\mathrm{d}u^{m_k}}(u). \tag{8.3}$$

Sumowanie we wzorze na współczynniki a_{jk} przebiega po wszystkich podziałach liczby j na dodatnie składniki.

Możemy zauważyć, że pochodna rzędu j funkcji h w punkcie u jest kombinacją liniową pochodnych rzędu $1, \ldots, j$ funkcji g w punkcie $t = f(u)$, a współczynniki a_{jk} tej kombinacji liniowej są wyznaczone przez pochodne funkcji f. W praktyce najwygodniej jest kolejne wzory dla $j = 1, 2, 3, 4, \ldots$ wyprowadzać rekurencyjnie, korzystając z wzorów opisujących pochodną pierwszego rzędu iloczynu i złożenia funkcji. Pomijając dla skrótu argumenty funkcji, dostaniemy w ten sposób

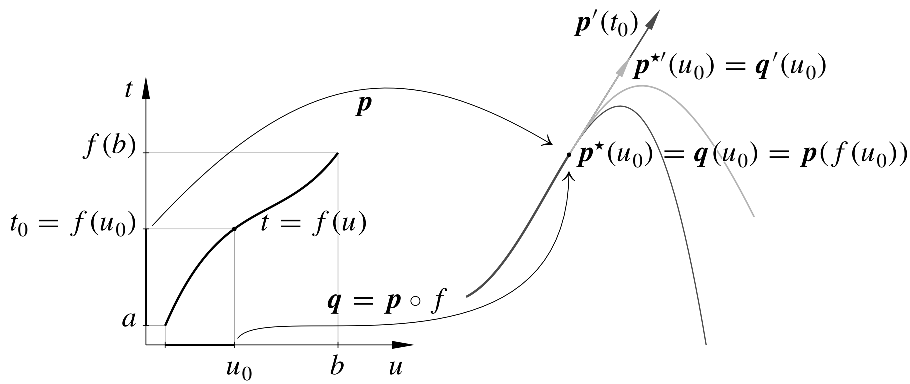
$$\begin{aligned}
h' &= f'g', \\
h'' &= f''g' + f'^2 g'', \\
h''' &= f'''g' + 3f'f''g'' + f'^3 g''', \\
h^{(4)} &= f^{(4)}g' + \bigl(3f''^2 + 4f'f'''\bigr)g'' + 4f'^2 f''g''' + f'^4 g^{(4)}, \\
h^{(5)} &= f^{(5)}g' + (5f'f^{(4)} + 10f''f''')g'' + (10f'^2 f''' + 15f'f''^2)g''' + \\
&\quad 10f'^3 f''g^{(4)} + f'^5 g^{(5)} \quad \text{itd.}
\end{aligned}$$

8.2.2. Łączenie zreparametryzowanych krzywych

Niech $\boldsymbol{p}(t)$ oznacza regularną parametryzację klasy C^n, której dziedziną jest przedział $[a, t_0]$ i niech f oznacza monotoniczną funkcję klasy C^n. Możemy dokonać zamiany parametru, podstawiając $t = f(u)$. Jeśli oznaczymy $\boldsymbol{q}(u) = \boldsymbol{p}\big(f(u)\big)$, to na podstawie (8.2) otrzymamy wzór

$$\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}u^j}\boldsymbol{q}(u) \;=\; \sum_{k=1}^{j} a_{jk}(u)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\boldsymbol{p}(t), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{8.4}$$

w którym występują funkcje a_{jk} opisane wzorem (8.3).



Rysunek 8.3. Gładkie połączenie dwóch krzywych parametrycznych

Przypuśćmy, że mając daną parametryzację $\boldsymbol{p}(t)$, chcemy skonstruować taką parametryzację $\boldsymbol{p}^\star(u)$ określoną w przedziale $[u_0, b]$, aby łuki opisane przez te dwie parametryzacje tworzyły razem krzywą klasy G^n. Aby to osiągnąć, nałożymy na funkcję f pewne warunki. Dla uniknięcia powstania osobliwości przyjmiemy, że pochodna funkcji f jest dodatnia. Taka funkcja ma odwrotność, f^{-1}. Jeśli $f(u_0) = t_0$, to przeciwobraz przedziału $[a, t_0]$ (tj. jego obraz w przekształceniu f^{-1}) sąsiaduje z przedziałem $[u_0, u_b]$ (rys. 8.3), tworząc razem z nim dziedzinę $[f^{-1}(a), b]$ sklejanej parametryzacji

$$\boldsymbol{s}(u) \;=\; \begin{cases} \boldsymbol{p}\big(f(u)\big) & \text{jeśli } u \in [f^{-1}(a), u_0), \\ \boldsymbol{p}^\star(u) & \text{jeśli } u \in [u_0, b]. \end{cases} \tag{8.5}$$

Parametryzacja $\boldsymbol{p}^\star$ ma spełniać warunki interpolacyjne w punkcie u_0. Aby parametryzacja $\boldsymbol{s}$ była ciągła, musi być

$$\boldsymbol{p}^\star(u_0) \;=\; \boldsymbol{q}(u_0) = \boldsymbol{p}(t_0).$$